Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з курсу “Рівняння математичної фізики”

Задача Коші та задача Гурса для рівнянь з частинними похідними

для студентів механіко-математичного факультету

Київ – 2006

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з курсу “Рівняння математичної фізики” для студентів механіко-математичного факультету. Задача Коші та задача Гурса для рівнянь з частинними похідними. / Упоряд. І.Б. Романенко, В.Г. Самойленко. – Київ, 2006. – 55 с.

Рецензенти:

Глущенко А.А., д-р фіз.-мат. наук, проф. кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Бойко В.В., канд. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України

Рекомендовано до друку Вченою радою
механіко-математичного факультету
«10» квітня 2006 р.,
протокол № 11

Вступ

За діючим навчальним планом студенти механіко-математичного факультету вивчають курс “Рівняння математичної фізики” протягом одного навчального семестру. Дані методичні вказівки розроблені для підготовки та проведення практичних занять з рівнянь математичної фізики і розраховані на студентів та викладачів. Під час підготовки методичних вказівок використано багаторічний досвід викладання цього курсу на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Методичні вказівки містять матеріал з теми “Задача Коші та задача Гурса для рівнянь з частинними похідними”. Подано постановку задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, розглянуто питання коректності постановки задачі Коші, наведено формули розв’язку задач Коші для рівняння коливань та теплопровідності у класичній постановці, розглянуто застосування хвильового методу до дослідження розповсюдження коливань вздовж нескінченної струни та на півпрямій, вказано спосіб розв’язання найпростіших задач Гурса.

Під час підготовки цих методичних вказівок упорядники використовували літературу, перелік якої подано у кінці методичної розробки. Складаючи завдання для самостійного розв’язання, упорядники використовували навчальні посібники [1 – 5].

При підготовці до практичних занять та самостійній роботі для більш глибокого вивчення теоретичного матеріалу доцільно також використовувати [6-13]. Додатковий матеріал з курсів алгебри, математичного аналізу та звичайних диференціальних рівнянь, потрібний для розв’язання задач, можна знайти у [14 – 18].

§ 1. Постановка задачі Коші для лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними

Нехай Ω – область в R^n (не обов'язково обмежена), $n \geq 2$. Розглянемо в Ω рівняння з частинними похідними

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x)u = f(x), \qquad (1)$$

де $x \in \Omega$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\ i, j = \overline{1,n}$.

Для кожного $x \in \Omega$ позначимо $A = \left\| a_{ij}(x) \right\|_{i,j=1}^{n}$. A називають матрицею коефіцієнтів рівняння (1).

Нехай S – $(n-1)$ - вимірна поверхня з класу C^2, яка належить області Ω. Нехай поверхня S може бути визначена за допомогою рівняння

$$\sigma(x) = 0,$$

де $\sigma \in C^2$ і $\nabla\sigma \neq 0$ для усіх $x \in S$.

Нехай в Ω задано векторне поле $l(x) = (l_1(x), l_2(x), \ldots l_n(x))$, де $l_i \in C^1$, $|l|^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) \neq 0,\ x \in \Omega$.

Припустимо, що у жодній точці поверхні S поле l не є дотичним до S, тобто

$$\left.\frac{\partial\sigma}{\partial l}\right|_S = \left.\frac{(l, \nabla\sigma)}{|l|}\right|_S \neq 0 .$$

Задачею Коші для рівняння (1) називається задача вигляду

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = u_0(x), \quad x \in S, \\ \dfrac{\partial u}{\partial l}(x) = u_1(x), \quad x \in S, \end{cases} \tag{2}$$

де $u_0,\ u_1 \in C^2(S)$.

Приклад 1. Задача Коші для одновимірного хвильового рівняння.

Сформулювати задачу про малі коливання струни нескінченної довжини під дією зовнішніх сил, сил тертя та сил опору середовища, якщо у початковий момент $t = 0$ профіль струни визначався функцією $\varphi(x)$, а швидкості точок струни – функцією $\psi(x)$.

Розв’язання. З §1 у [6] випливає, що рівняння в частинних похідних, яке визначає закон перебігу процесу коливань для точок струни, має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) - \beta \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma u\,,\ x \in R,\ t > 0\,,$$

де функція $f(x,t)$ визначається щільністю зовнішніх сил; β – коефіцієнтом тертя; γ – коефіцієнтом сил опору середовища.

Початкові умови для досліджуваної задачі мають вигляд

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\,,\ x\in R\,.$$

Отже, формулювання задачі Коші у даному прикладі виглядає так:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)-\beta\dfrac{\partial u}{\partial t}-\gamma u, & x\in R,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), & x\in R.\end{cases}$$

Приклад 2. Задача Коші для одновимірного рівняння теплообміну.

Сформулювати задачу про теплообмін усередині тонкого однорідного стрижня сталого перерізу з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо усередині стрижня діють внутрішні джерела тепла з заданою щільністю, а температура стрижня у початковий момент t = 0 визначалася функцією $\varphi(x)$.

Розв’язання. З §2 у [6] випливає, що рівняння в частинних похідних, яке визначає закон перебігу процесу коливань для точок струни, має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\ ,\ x \in R,\ t > 0\ ,$$

де функція $f(x,t)$ визначається щільністю теплових джерел.

Початкові умови для досліджуваної задачі мають вигляд

$$u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ x \in R\ .$$

Отже, формулювання задачі Коші у даному прикладі виглядає так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & x \in R,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R. \end{cases}$$

§ 2. Коректність задачі Коші для лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними

Будемо говорити, що задача (2) поставлена коректно, якщо вона має єдиний розв'язок, причому цей розв'язок залежить неперервним чином від початкових даних, визначених за допомогою функцій $u_0(x)$ та $u_1(x)$.

З питанням коректності задачі Коші тісно пов'язані поняття характеристичної точки та характеристичної поверхні для рівняння (1).

Точка x_0 поверхні G, визначеної рівнянням $\gamma(x)=0$, де $\gamma \in C^1$ і $\nabla\gamma \neq 0$ для усіх $x \in G$, називається характеристичною, якщо при $x = x_0$ справедлива рівність

$$(A(x)\nabla\gamma, \nabla\gamma) = 0\,.$$

У тому випадку, коли ця рівність виконана для усіх точок поверхні G, ця поверхня називається характеристичною поверхнею (або, як ще кажуть, характеристикою) для рівняння (1).[1]

Відомо (див., наприклад, [12]), що коли поверхня S має хоча б одну характеристичну точку, то задача (2) може або не мати розв’язку, або мати кілька розв’язків.

Приклад 3.

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \;\; y > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{3}$$

Застосовуючи методику знаходження характеристик, викладену в [7], можна встановити, що характеристиками рівняння з задачі (3) будуть лінії $x = c$ та

[1] З методикою та прикладами знаходження характеристик для рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними можна познайомитись в [7].

$y = c$. Одна з таких ліній (а саме $y = 0$) є поверхнею, на якій сформульовані початкові умови задачі (3).

Нескладно переконатись, що загальний розв'язок рівняння задачі (3) має вигляд

$$u = f(x) + g(y) .$$

Підстановка знайденого загального розв'язку рівняння до початкових умов задачі призводить до системи рівностей

$$f(x) + g(0) = \varphi(x) , \qquad g'(0) = \psi(x) . \tag{4}$$

У тому випадку, коли функція ψ відмінна від сталої, система (4), а отже і задача (3), розв'язку не має. Якщо ж ψ – стала, то задача (3) матиме розв'язок, однак цей розв'язок буде визначений з точністю до довільної функції $g(\ y\ )$, яка задовольняє умову $g'(0) = \psi$. У будь-якому випадку задача (3) не буде коректною.

Відомо (дивись, наприклад, [12]), що коли поверхня S, визначена рівнянням (2), має хоча б одну характеристичну точку, то задача (2) може або не мати розв'язку, або мати кілька розв'язків.

У тому випадку, коли поверхня S не має характеристичних точок, буде справедливою теорема Ковалевської.

Нехай x_1, x_2, … x_n - незалежні змінні, $x=(x_1,...x_n)$, u - невідома функція від незалежних змінних, яка задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^r u}{\partial x_i^r}=F\left(x_1,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},...\right). \quad (5)$$

Означення. Диференціальне рівняння з частинними похідними (5) називається нормальним стосовно змінної x_i, якщо функція F у правій частині (5) не залежить від частинних похідних функції $u(x)$ по змінній x_i порядку, вище, ніж $r-1$, та від інших частинних похідних функції $u(x)$ порядку, вище ніж r.

Задачу Коші для нормального рівняння формулюють таким чином:

Знайти розв'язок рівняння (5), який задовольняє початкові умови (умови Коші):

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x_i^s}\right|_{x_i=x_{i0}}=\varphi_s(x_1,x_2,...x_{i-1},x_{i+1},...x_n),\ s=0,1,...r-1, \quad (6)$$

де x_{i0} - деяке фіксоване значення змінної x_i, φ_s - відомі функції від змінних $x_1,x_2,...x_{i-1},x_{i+1},...x_n$.

Теорема Ковалевської.

Нехай диференціальне рівняння (5) є нормальним стосовно змінної x_i, функції $\varphi_s(x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n)$ в початкових умовах (6) є аналітичними функціями незалежних змінних в околі точки $(x_{10}, x_{20}, \dots x_{i-10}, x_{i+10}, \dots x_{n0})$, а функція F з правої частини рівняння (5) є аналітичною функцією всіх своїх аргументів в околі точки їх числових значень, що відповідають точці $P(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n0})$ в силу початкових умов (6). Тоді в околі точки $P(x_{10}, x_{20}, \dots x_{n0})$ існує аналітичний за змінними x_1, x_2, … x_n розв’язок задачі Коші (5), (6), єдиний у класі аналітичних функцій.

§ 3. Розв’язання задач Коші длкя хвильового рівняння

Задача Коші для рівняння коливань струни (випадок $n = 1$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in R,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in R \end{cases} \tag{7}$$

має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулою Д’Аламбера:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)dy\,. \qquad (8)$$

Задача Коші для рівняння поперечних коливань тонкої нескінченної мембрани (випадок $n = 2$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(x,t), \quad x\in R^2,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), \quad x\in R^2 \end{cases} \qquad (9)$$

має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулою Пуассона:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y-x|<at}\frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|<at}\frac{\psi(y)dy}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\int\limits_{|y-x|<a(t-\tau)}\frac{f(y,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}} \qquad (10)$$

Задача Коші для рівняння просторового розповсюдження хвиль, паралельних до деякого напрямку (випадок $n = 3$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(x,t), \quad x\in R^3,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), \quad x\in R^3 \end{cases} \qquad (11)$$

має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулою Кірхгофа:

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at}\varphi(y)dS_y\right]+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at}\psi(y)dS_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|x-y|<at}\frac{f\left(y,t-\frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|}dy. \qquad (12)$$

У фізичному тлумаченні формул Кірхгофа та Пуасона є суттєва відмінність. Формула Кірхгофа моделює розповсюдження фронту хвилі у тривимірному просторі; у такому випадку фронт хвилі має вигляд сфери, вздовж радіус-векторів якої з однаковою швидкістю a розповсюджується початкове збурення. При цьому у випадку фінітного початкового збурення можна відрізнити передній фронт хвилі – той момент, коли дія збурення досягає досліджуваної точки, та задній фронт – той момент коли дія збурення закінчується. Третій доданок формули Кірхгофа має окрему назву «запізнюючий потенціал».

У двовимірному ж випадку, коли справедлива формула Пуассона, збурення у кожен момент визначається значеннями, відомими усередині круга, радіус якого збільшується зі сталою швидкістю a. Таким чином, хвиля, що досягає досліджуваної точки, у цьому випадку буде мати передній фронт, однак задній фронт буде відсутнім – дія початкового збурення не завершується. Це досить легко зрозуміти, якщо пригадати, що двовимірна задача фактично являє собою тривимірну задачу, в якій множини ненульових значень початкових функцій являють собою нескінченні циліндри з твірними, паралельними до осі z.

Фізичний зміст формули Д’Аламбера буде розглянуто у параграфі «Метод хвиль для задачі Коші».

Приклад 5

Розв’язати задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 6,\ u\big|_{t=0} = x^2,\ u_t\big|_{t=0} = 4x.$$

Розв’язання. Задача, наведена у даному прикладі, є частковим випадком задачі (7), розв’язок якої може бути знайдено за формулою (8). Підставивши у формулу (8) функції правих частин та коефіцієнт a задачі з даного прикладу, маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}((x-t)^2 + (x+t)^2) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 4y\,dy + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} 6\,dy\,d\tau =$$

$$= x^2 + t^2 + 4xt + 3t^2 = (x+2t)^2.$$

Приклад 6

Розв’язати задачу $(n=2)$:

$$u_{tt} = \Delta u + 2,\ u\big|_{t=0} = x,\ u_t\big|_{t=0} = y.$$

Розв'язання. Задача, наведена у даному прикладі, є частковим випадком задачі (9), розв'язок якої може бути знайдено за формулою (10). Підставивши у формулу (10) функції правих частин та коефіцієнт $a=1$ задачі з даного прикладу, маємо

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|(\xi,\eta)-(x,y)|<t}\frac{\xi\, d\xi d\eta}{\sqrt{t^2-|(\xi,\eta)-(x,y)|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|(\xi,\eta)-(x,y)|<t}\frac{\eta\, d\xi d\eta}{\sqrt{t^2-|(\xi,\eta)-(x,y)|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{|(\xi,\eta)-(x,y)|<(t-\tau)}\frac{2}{\sqrt{(t-\tau)^2-|(\xi,\eta)-(x,y)|^2}}$$

Обчислимо, наприклад, перший доданок у наведеній формулі. З цією метою в інтегралі зручно виконати заміну змінних $\xi=x+r\cos\varphi$, $\eta=y+r\sin\varphi$. Отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|(\xi,\eta)-(x,y)|<t}\frac{\xi\, d\xi d\eta}{\sqrt{t^2-|(\xi,\eta)-(x,y)|^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t dr\int\limits_0^{2\pi}\frac{r(x+r\cos\varphi)d\varphi}{\sqrt{t^2-r^2}}=x\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}=$$

$$=-x\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{t^2-r^2}\Big|_0^t=x\,.$$

Повністю аналогічно можемо отримати, що другий доданок у сумі дорівнює ty, а третій становить t^2. Таким чином, відповідь у даному прикладі

$$u(x,y,t) = x + ty + t^2 .$$

Приклад 7

Розв'язати задачу $(n=3)$:

$$u_{tt} = \Delta u + 2xyz \,,\; u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2 \,,\; u_t\big|_{t=0} = 1 .$$

Розв'язання. Задача, наведена у даному прикладі, є частковим випадком задачі (11), розв'язок якої може бути знайдено за формулою (12). Підставивши у формулу (12) функції правих частин та коефіцієнт $a=1$ задачі з даного прикладу, маємо

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|=t}(\xi^2+\eta^2-2\zeta^2)dS\right] +$$

$$+\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|=t} dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|<t}\frac{2\xi\eta\zeta \;\; d\xi d\eta d\zeta}{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|} .$$

Обчислимо перший доданок у наведеній формулі. За допомогою введення параметризації сфери

$$\xi = x + t\cos\varphi\sin\theta \,,\; \eta = y + t\sin\varphi\sin\theta \,,\; \zeta = z + t\cos\theta$$

та формули обчислення диференціалу по поверхні $dS=\sqrt{EG-F^2}d\varphi d\theta$ (див., наприклад, [16], стор. 470), можемо встановити, що

$$\int\limits_{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|=t}(\xi^2+\eta^2-2\zeta^2)dS=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}((x+t\cos\varphi\sin\theta)^2+$$

$$+(y+t\sin\varphi\sin\theta)^2-2(z+t\cos\theta)^2)t^2\sin\theta d\theta=$$

$$=4\pi t^2(x^2+y^2-2z^2)\,.$$

Тому

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|=t}(\xi^2+\eta^2-2\zeta^2)dS\right]=x^2+y^2-2z^2\,.$$

Другий доданок може бути обчислено за допомогою формули площі поверхні сфери:

$$\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|=t}dS=t\,,$$

а третій за допомогою заміни

$$\xi=x+\rho\cos\varphi\sin\theta\,,\ \eta=y+\rho\sin\varphi\sin\theta\,,\ \zeta=z+\rho\cos\theta$$

та врахування рівності нулю інтегралів від тригонометричних функцій по повному періоду:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|<t}\frac{2\xi\eta\zeta}{|(\xi,\eta,\zeta)-(x,y,z)|}d\xi d\eta d\zeta=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (x + \rho\cos\varphi\sin\theta)(y + \rho\sin\varphi\sin\theta) \cdot$$

$$\cdot (z + \rho\cos\theta) \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} 2xy(z + \rho\cos\theta)\, \rho\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} 2xyz\, \rho\sin\theta\, d\theta = t^2 xyz\ .$$

Таким чином, відповідь у даному прикладі

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 - 2z^2 + t + t^2 xyz\ .$$

§ 4. Метод хвиль для задачі Коші на прямій

Розглянемо задачу Коші, що визначає процес вільних коливань нескінченної струни

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in R,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in R \end{cases} \tag{13}$$

Як вже було зазначено, розв'язок такої задачі може бути знайдено за формулою Д'Аламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\big) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy\ . \tag{14}$$

З іншого боку, застосування методики розв’язання рівняння за допомогою характеристик (див. [7]) до рівняння у задачі (13) дозволяє встановити, що загальний розв’язок такого рівняння має вигляд:

$$u(x,t)=\Phi(x-at)+\Psi(x+at), \tag{15}$$

Де $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ – довільні двічі неперервно диференційовані функції.

Дійсно, розв’язок у формулі (14) можна переписати у вигляді

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{x_0}\psi(y)dy+\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(y)dy\right)$$

і позначити

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{2}\varphi(\xi)+\frac{1}{2a}\int\limits_{\xi}^{x_0}\psi(y)dy,\ \Psi(\xi)=\frac{1}{2}\varphi(\xi)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{\xi}\psi(y)dy.$$

Подання за допомогою формули (15) дозволяє надати формулі (14) фізичну інтерпретацію. Функцію $\Phi(x-at)$ можна тлумачити, як хвилю, що зі сталою швидкістю a відносить початкове збурення, визначене у точці x, у правий бік вздовж струни (так звана «пряма» хвиля). Функція $\Psi(x-at)$ може бути інтерпретована як аналогічна хвиля, що зі сталою швидкістю a відносить початкове збурення, але у лівий бік від точки x

(«зворотна» хвиля). Саме тому профіль струни для кожної її точки x у довільний момент часу $t > 0$ є суперпозицією дії прямої та зворотної хвиль.

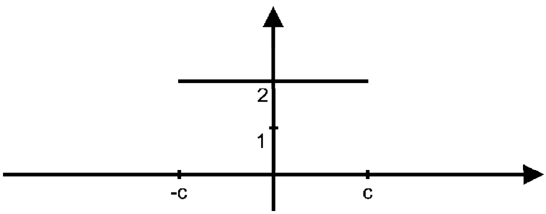

Рис. 1

Для більш повного розуміння фізичної суті та застосування методу хвиль розглянемо модельний приклад.

Приклад 8

Необмеженій струні на відрізку $-c \le x \le c$ було надано поперечне відхилення, що дорівнює 2. Поза цим відрізком початкове відхилення дорівнює нулю. Початкові швидкості точок струни дорівнюють 0. Накреслити положення струни для моментів часу $t_k = \dfrac{kc}{2a}$, де $k = 0,1,2,3$.

Розв'язання. Згідно з фізичною інтерпретацією методу хвиль можна говорити, що початкове збурення на відрізку $[-c,c]$ «поділяється навпіл» на дві хвилі, пряму та зворотну, які починають рухатись вздовж струни зі сталою швидкістю a у протилежних напрямках. Тому для кожного моменту часу зобразимо графічно профілі прямої та зворотної хвилі; профіль струни у кожен момент часу можна отримати за допомогою складання графіків прямої та зворотної хвиль.

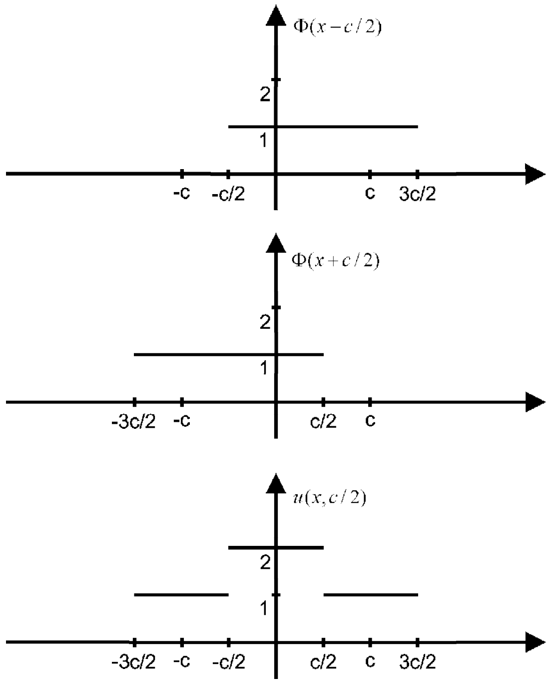

Рис. 2

Профіль струни у момент часу $t=0$, що відповідає $k=0$,

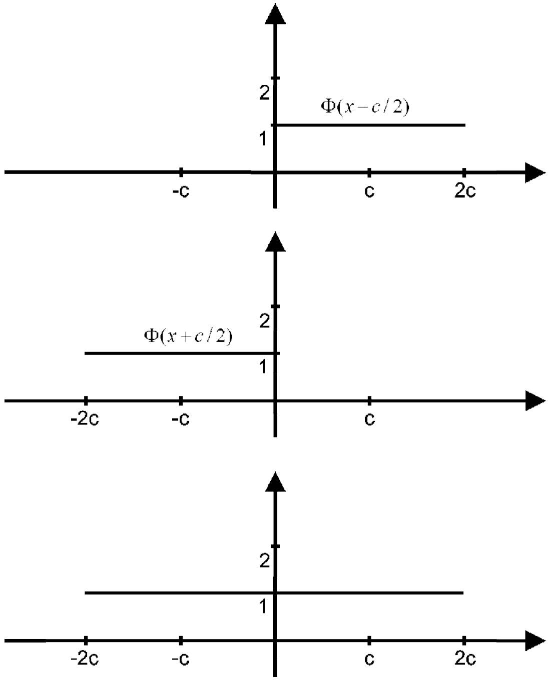

Рис. 3

зображено на рис. 1.

У момент часу $t=\dfrac{c}{2a}$ профіль струни визначається сумою профілів двох хвиль – прямої $\Phi(x-c/2)$ та зворотної $\Phi(x+c/2)$. Профілі прямої, зворотної хвилі та профіль струни – суми цих двох хвиль – зображено на рис. 2.

Аналогічним чином можна отримати зображення профілів струни у моменти часу $t = \dfrac{c}{a}$ та $t = \dfrac{3c}{2a}$. Ці профілі відповідно зображено на рис. 3 та 4.

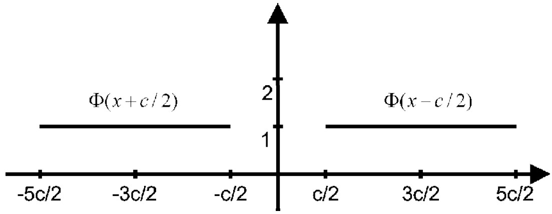

Рис. 4

§ 5. Розв'язання задач для рівняння струни на півпрямій

Розглянемо задачі для рівняння струни на півпрямій з однорідними крайовими умовами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \ge 0, \\ u(0,t) = 0,\ t \ge 0. \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \ge 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ t \ge 0. \end{cases} \tag{17}$$

Розв'язання задач (16) та (17) можна досить легко алгоритмізувати, якщо скористатись результатами таких лем:

Лема (про непарні функції)

Нехай функція $u(x,t)$ визначена формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(y)dy+\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(y)dy\right),$$

а функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ та $f(x,t)$ – непарні по x та неперервні. Тоді $u(0,t)=0$.

Лема (про парні функції)

Нехай функція $u(x,t)$ визначена формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x_0}\psi(y)dy+\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(y)dy\right),$$

а функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ та $f(x,t)$ – парні та неперервно диференційовані по x. Тоді $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$.

Справді, тепер процес розв'язання задачі (16) можна здійснювати таким чином:

1. Продовжити функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ та $f(x,t)$ задачі (16) непарним чином по змінній x на множину $x<0$:

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x),\ x\ge 0,\\ -\varphi(-x),\ x<0,\end{cases}\qquad \widetilde{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x),\ x\ge 0,\\ -\psi(-x),\ x<0,\end{cases}$$

$$\widetilde{f}(x,t)=\begin{cases} f(x,t), \ x\ge 0, \\ -f(-x,t), \ x<0, \end{cases}$$

та перейти до розв'язання задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}+\widetilde{f}(x,t), \quad x\in R, \ t>0, \\ \widetilde{u}(x,0)=\widetilde{\varphi}(x), \quad \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x,0)=\widetilde{\psi}(x), \quad x\in R. \end{cases} \tag{18}$$

2. Розв'язок $\widetilde{u}(x,t)$ задачі (18) знайти за формулою (8). Згідно з лемою про непарні функції, цей розв'язок буде рівний 0 при $x=0$.
3. Розв'язок $u(x,t)$ задачі (16) знайти як звуження розв'язку $\widetilde{u}(x,t)$ задачі (18) на множину $x\ge 0$.

Алгоритм розв'язання для задачі (17) аналогічний:

1. Продовжити функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ та $f(x,t)$ задачі (16) парним чином по змінній x на множину $x<0$:

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases} \varphi(x), \ x\ge 0, \\ \varphi(-x), \ x<0, \end{cases} \qquad \widetilde{\psi}(x)=\begin{cases} \psi(x), \ x\ge 0, \\ \psi(-x), \ x<0, \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(x,t)=\begin{cases} f(x,t), \ x\ge 0, \\ f(-x,t), \ x<0, \end{cases}$$

та перейти до розв'язання задачі

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{f}(x,t), \quad x\in R,\ t>0, \\
\tilde{u}(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(x,0) = \tilde{\psi}(x), \quad x\in R.
\end{cases} \tag{19}
$$

2. Розв'язок $\tilde{u}(x,t)$ задачі (19) знайти за формулою (8). Згідно з лемою про парні функції, цей розв'язок задовольняє умову $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$.
3. Розв'язок $u(x,t)$ задачі (17) знайти як звуження розв'язку $\tilde{u}(x,t)$ задачі (19) на множину $x\geq 0$.

Розглянуту методику розв'язання зручно застосовувати в поєднанні з методом хвиль.

Приклад 9

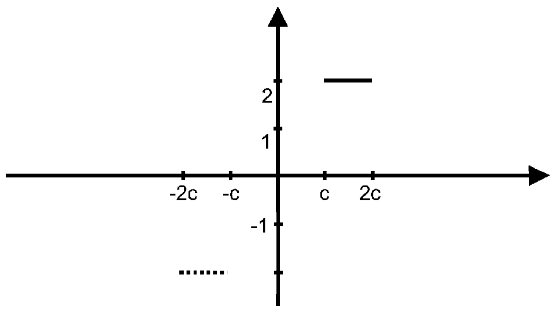

Рис. 5

Напівобмеженій струні ($x>0$) на відрізку $c\leq x\leq 2c$ було надано поперечне відхилення, що дорівнює 2. Поза цим відрізком початкове відхилення дорівнює нулю. Початкові швидкості точок струни дорівнюють 0. Струну жорстко закріплено у точці $x = 0$ на висоті 0. Накреслити положення струни для моментів часу $t_k = \dfrac{kc}{2a}$, де $k = 1, 3, 4, 5$.

Розв'язання: Продовжимо функції задачі на ліву піввісь змінної x непарним чином. Тоді отримуємо задачу про відшукання коливань струни з таким початковим профілем, як зображено на рис. 5 (частини профілю струни,

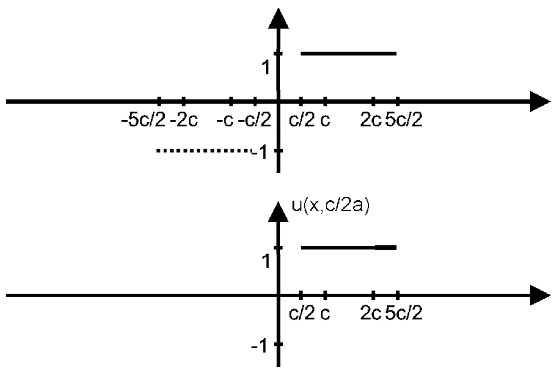

Рис. 6

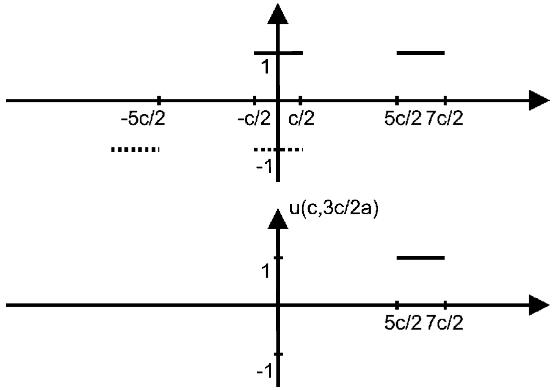

Рис. 7

отримані за рахунок продовження, тут і надалі будемо зображати пунктиром).

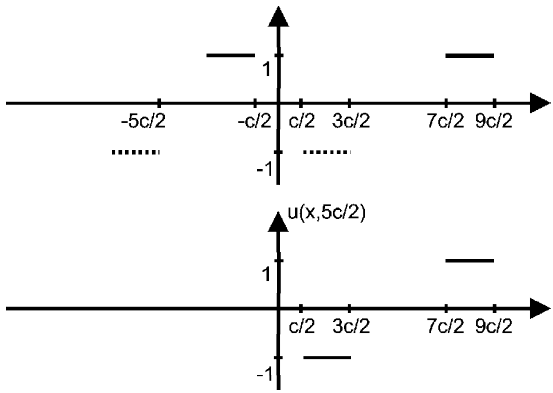

Рис. 8

Повністю аналогічно до того, як це було зроблено у прикладі 8, можемо зобразити положення прямої та зворотної хвиль на профілі струни у різні моменти часу. Виконавши графічне складання цих профілів для правої півосі, отримаємо вигляд профілю струни у правій півосі у моменти часу $t = \dfrac{c}{2a}$ (рис. 6), $t = \dfrac{3c}{2a}$ (рис. 7) та $t = \dfrac{5c}{2a}$ (рис. 8).

§ 6. Розв'язання задач Коші для рівняння теплопровідності

Задача Коші для рівняння розповсюдження тепла в n-вимірному просторі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t), \quad x \in R^n, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R^n \end{cases}$$

має єдиний розв'язок, який може бути знайдено за формулою Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{R^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^n} \frac{f(y,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} dy d\tau$$

Приклад 10

Розв'язати задачу ($n = 1$): $u_t = 4u_{xx} + t + e^t$, $u\big|_{t=0} = 2$;

Розв’язання: З формули Пуассона розв’язку задачі теплопровідності, лінійних замін змінних та відомої формули для інтегралу Пуассона ($\int\limits_R e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$) маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int\limits_R 2e^{-\frac{|x-y|^2}{16t}}dy + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R \frac{(\tau + e^\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{|x-y|^2}{16(t-\tau)}}dyd\tau =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_R e^{-\xi^2}4\sqrt{t}d\xi + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{(\tau + e^\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_R e^{-\xi^2}4\sqrt{t-\tau}d\xi d\tau =$$

$$= 2 + \int\limits_0^t (\tau + e^\tau)d\tau = 1 + \frac{t^2}{2} + e^t .$$

§ 7. Задача Гурса

Для рівнянь гіперболічного типу може виникати так звана задача Гурса. Розглянемо рівняння гіперболічного типу вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x). \qquad (20)$$

Нехай $\varphi_1(x_1,x_2) = c_1$ та $\varphi_2(x_1,x_2) = c_2$ – дві деякі характеристики рівняння (20), які перетинаються між собою у точці $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, а Ω – область, границею якої є частини цих характеристик від точки перетину. Тоді задачею Гурса для рівняння (20) будемо називати задачу

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x) u_{x_i} + a(x)u = f(x),\ x \in \Omega\,, \tag{21}$$

$$u(x) = f_1(x),\ x \in \partial\Omega \bigcap \left\{ \varphi_1(x_1, x_2) = c_1 \right\}, \tag{22}$$

$$u(x) = f_2(x),\ x \in \partial\Omega \bigcap \left\{ \varphi_2(x_1, x_2) = c_2 \right\}. \tag{23}$$

На відміну від задачі Коші, задача Гурса (21) – (23) є більш складним об'єктом для аналізу та розв'язання. Для її дослідження та пошуку розв'язку розроблені спеціальні методи, наприклад метод Рімана (див. [8]). Ми обмежимось лише найпростішими випадками задачі Гурса і зауважимо лише, що така задача не завжди є розв'язною чи то однозначно розв'язною.

Розглянемо випадок, коли для рівняння (21) можна встановити формулу загального розв'язку. Тоді задачу (21) – (23) можна спробувати розв'язати, підставляючи формулу загального розв'язку рівняння (21) в умови (22) та (23) та відшукуючи невідомі функції у загальному розв'язку з утвореної нелінійної системи.

Приклад 11

Знайти розв'язок задачі Гурса

$$u_{xy} + u_x = x\,,\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ u\big|_{x=0} = y^2\,,\ u\big|_{y=0} = x^2\,.$$

Розв'язання: За допомогою методу характеристик (див., наприклад, [7]) можемо встановити, що загальний розв'язок рівняння задачі має вигляд

$$u = c_1(y) + c_2(x)e^{-y}.$$

Підстановка отриманого розв'язку у крайові умови задачі дає співвідношення

$u\big|_{x=0} = c_1(y) + c_2(0)e^{-y} = y^2$, $u\big|_{x=0} = c_1(0) + c_2(x) = x^2$,

звідки $c_1(y) = y^2 - c_2(0)e^{-y}$, $c_2(x) = x^2 - c_1(0)$ і

$$u(x,y) = y^2 + x^2e^{-y} - (c_1(0) + c_2(0))e^{-y}.$$

Підставляючи у формулу загального розв'язку рівняння задачі координати точки (0,0) (точка перетину кривих, на яких сформульовано крайові умови), маємо з крайових умов задачі $c_1(0) + c_2(0) = 0$, звідки

$$u(x,y) = y^2 + x^2e^{-y}.$$

Задачі для практичних занять та самостійної роботи

Задачі до § 3, 4, 5

1. Розв'язати задачі ($n = 1$):

   1) $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$, $u\big|_{t=0} = x^2$, $u_t\big|_{t=0} = x$;

   2) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$, $u\big|_{t=0} = \sin x$, $u_t\big|_{t=0} = 0$;

   3) $u_{tt} = u_{xx} + e^x$, $u\big|_{t=0} = \sin x$, $u_t\big|_{t=0} = x + \cos x$;

4) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$, $u\big|_{t=0} = 1$, $u_t\big|_{t=0} = 1$;

5) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x$, $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = 0$;

6) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t$, $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = 0$.

2. Розв'язати задачі ($n = 2$):

1) $u_{tt} = \Delta u + 6xyt$, $u\big|_{t=0} = x^2 - y^2$, $u_t\big|_{t=0} = xy$;

2) $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy^2$, $u\big|_{t=0} = e^x \cos y$, $u_t\big|_{t=0} = e^y \sin x$;

3) $u_{tt} = \Delta u + t \sin y$, $u\big|_{t=0} = x^2$, $u_t\big|_{t=0} = \sin y$;

4) $u_{tt} = 2\Delta u$, $u\big|_{t=0} = 2x^2 - y^2$, $u_t\big|_{t=0} = 2x^2 + y^2$;

5) $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3$, $u\big|_{t=0} = x^2$, $u_t\big|_{t=0} = y^2$;

6) $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y}$, $u\big|_{t=0} = e^{3x+4y}$, $u_t\big|_{t=0} = e^{3x+4y}$;

7) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u\big|_{t=0} = \cos(bx + cy)$, $u_t\big|_{t=0} = \sin(bx + cy)$;

8) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u\big|_{t=0} = (x^2 + y^2)^2$, $u_t\big|_{t=0} = (x^2 + y^2)^2$;

9) $u_{tt} = a^2 \Delta u + (x^2 + y^2)e^t$, $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = 0$.

3. Розв'язати задачі ($n = 3$):

1) $u_{tt} = \Delta u + 2xyz$, $u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2$, $u_t\big|_{t=0} = 1$;

2) $u_{tt} = 8\Delta u + t^2 x^2$, $u\big|_{t=0} = y^2$, $u_t\big|_{t=0} = z^2$;

3) $u_{tt} = 3\Delta u + 6(x^2 + y^2 + z^2)$, $u\big|_{t=0} = x^2 y^2 z^2$, $u_t\big|_{t=0} = xyz$;

4) $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$, $u\big|_{t=0} = e^{x+y} \cos z\sqrt{2}$, $u_t\big|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x$;

5) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$, $u_t\big|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$;

6) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$, $u_t\big|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$;

7) $u_{tt} = a^2 \Delta u + (x^2 + y^2 + z^2)e^t$, $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = 0$;

8) $u_{tt} = a^2 \Delta u + \cos x \sin y\, e^z$, $u\big|_{t=0} = x^2 e^{y+z}$, $u_t\big|_{t=0} = \sin x\, e^{y+z}$;

9) $u_{tt} = a^2 \Delta u + xe^t \cos(3y + 4z)$, $u\big|_{t=0} = xy \cos z$, $u_t\big|_{t=0} = yz\, e^x$;

10) $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u\big|_{t=0} = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $u_t\big|_{t=0} = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. Нехай виконані достатні умови для існування розв’язку задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 \Delta u,\ u\big|_{t=0} = u_0(x),\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x)$$

і нехай при $|x| \geq \delta > 0$ виконані нерівності

$$m\,|x|^{\alpha} \leq u_0(x) \leq M\,|x|^{\alpha},\ m\,|x|^{\alpha-1} \leq u_1(x) \leq M\,|x|^{\alpha-1},$$

де $\alpha > 0$, $0 < m < M$. Довести, що для кожної точки x_0 існують додатні числа t_0, C_1, C_2 такі, що для усіх $t \geq t_0$ виконана оцінка $C_1 t^{\alpha} \leq u(x_0, t) \leq C_2 t^{\alpha}$.

5. Нехай виконані достатні умови існування розв'язку задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \; u\big|_{t=0} = u_0(x), \; u_t\big|_{t=0} = u_1(x)$$

і нехай для $\alpha > 0$ існують границі

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\alpha}} = A, \; \lim_{|x| \to \infty} \frac{u_1(x)}{|x|^{\alpha - 1}} = B.$$

Довести, що $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{u(x,t)}{t^{\alpha}} = C_n$ та знайти C_n, $n = 1, 2, 3$.

6. Довести, що якщо існує розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_t\big|_{t=0} = u_1(x),$$

то $u \in C^2(t \geq 0)$, $u_0 \in C^2(R^1)$, $u_1 \in C^2(R^1)$.

7. Нехай функція $u(x,t,t_0)$ при кожному фіксованому $t_0 \geq 0$ є розв'язком задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \; u\big|_{t=t_0} = 0, \; u_t\big|_{t=t_0} = f(x, t_0).$$

Довести, що функція $v(x,t,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} u(x,t,\tau)\, d\tau$ є розв'язком задачі Коші

$$v_{tt} = a^2 \Delta v + f(x,t),\ v\big|_{t=t_0} = 0,\ v_t\big|_{t=t_0} = 0.$$

8. Довести, що для існування розв’язку задачі Коші
$$u_{tt} = a^2 \Delta u,\ x \in R^3,\ u\big|_{t=0} = \alpha(|x|),\ u_t\big|_{t=0} = \beta(|x|)$$
досить, щоб $\alpha(r) \in C^3(r \geq 0)$, $\beta(r) \in C^2(r \geq 0)$ та $\alpha'(0) = \beta'(0) = 0$. Знайти цей розв’язок.

9. Довести, що для існування розв’язку задачі Коші $u_{tt} = \Delta u,\ x \in R^3,\ u\big|_{t=0} = \theta(1-|x|)\,|x|^{\alpha}\,(1-|x|)^{\beta},\ u_t\big|_{t=0} = 0$ необхідно і досить, щоб $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 3$. Знайти цей розв’язок.

10. Розв’язати задачу Коші
$$u_{tt} = u_{xx},\ u\big|_{t=0} = \theta(1-|x|)(x^2-1)^3,\ u_t\big|_{t=0} = 0.$$
Побудувати графіки функцій $u(x,0)$, $u\left(x,\frac{1}{2}\right)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$.

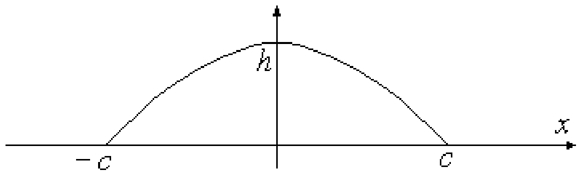

Рис. 9

11. Необмежена струна збурена початковим локальним відхиленням, що має форму квадратичної параболи (рис. 9). Знайти

1) формули, що визначають профіль струни при $t > 0$;
2) формули, що подають закон руху точок струни з різними абсцисами при $t > 0$.

12. Необмеженій струні на відрізку $-c \le x \le c$ надана поперечна початкова швидкість $v_0 = const$; поза цим відрізком початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти формули, що визначають закон руху точок струни з різними абсцисами при $t > 0$, та накреслити положення струни для моментів часу $t_k = \dfrac{kc}{4a}$, де $k = 0, 2, 4, 6$.

13. У початковий момент часу $t = 0$ необмежена струна набуває у точці $x = x_0$ поперечний удар, що надає струні імпульс I. Знайти відхилення $u(x,t)$ точок струни від положення рівноваги при $t > 0$, вважаючи, що початкові

відхилення точок струни та початкові швидкості дорівнюють нулю.

14. Розв'язати задачу про розповсюдження електричних коливань у необмеженому дроті за умови, що $GL = CR$, де G, L, C, R – втрати, самоіндукція, ємність та опір одиниці довжини дроту[2]. Напруга та сил струму у дроті у початковий момент відомі.

15. Напівобмежена струна $0 \le x < +\infty$ із закріпленим кінцем $x = 0$ у момент $t = 0$ отримує поперечний удар, що передає їй імпульс I на ділянці $0 \le x \le 2l$, причому профіль розподілу швидкості, отриманий при ударі, у момент часу $t = 0$ має форму півхвилі синусоїди з основою $0 \le x \le 2l$. Знайти формули, що подають швидкість руху точок струни з різними абсцисами x при $t > 0$.

[2] Ця умова забезпечує можливість проходження по дроту хвиль без викривлення їх форми. У подальшому такий дріт будемо називати: дріт без спотворення.

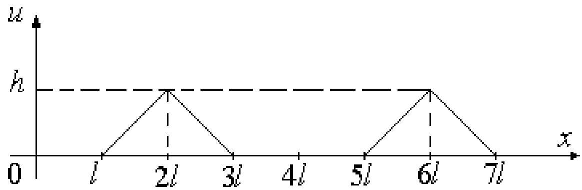

Рис. 10

16. Напівобмежений пружний стрижень $0 \le x < +\infty$ з вільним кінцем $x = 0$ у момент часу $t = 0$ збурений повздовжніми зсувами, профіль яких зображений на рис. 10. Знайти, у яких точках і коли при $t > 0$ зсуви досягають найбільшого значення. Яка величина такого найбільшого зсуву?

17. Напівобмеженій струні з закріпленим кінцем у початковий момент $t = 0$ за допомогою поперечного удару наданий імпульс I у точці $x = x_0$. Знайти відхилення $u(x,t)$ точок струни від положення рівноваги при $t > 0$, якщо початкові відхилення $u(x,0) = 0$, а початкові швидкості у точках $x \ne x_0$ теж дорівнюють нулю.

18. Вага $Q = Mg$, що рухається зі сталою швидкістю v_0 паралельно до осі x, у момент часу $t = 0$ у результаті удару прилипає до вільного кінця напівобмеженого стрижня $0 \le x < +\infty$ та продовжує рухатись разом із ним.

Знайти відхилення $u(x,t)$ поперечних перерізів стрижня від положення рівноваги при $t>0$, якщо початкові відхилення $u(x,0)=0$, а початкова швидкість дорівнює нулю усюди, крім перерізу $x=0$, де вона становить v_0.

19. Напівобмеженою циліндричною трубкою $0<x<+\infty$, що заповнена ідеальним газом, біжить хвиля $u(x,t)=f(x+at)$ при $t<0$, $f(0)=0$. У кінці трубки знаходиться поршень з масою M_0, насаджений на пружинку з коефіцієнтом жорсткості H_0 та малою власною вагою. Поршень щільно зачиняє трубку, а при русі усередині трубки зазнає опору, що пропорційний до швидкості. Знайти $u(x,t)$ при $0<t<+\infty$.

20. Знайти при $t>0$ електричні коливання у напівобмеженому дроті без спотворення, якщо при $t<0$ дротом бігла хвиля

$$v(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}f(x+at),\ i(x,t)=-e^{-\frac{R}{L}t}\sqrt{\frac{C}{L}}f(x+at).$$

Розглянути випадки, коли кінець дроту заземлений

1) через зосереджений опір R_0;
2) через зосереджену ємність C_0;
3) через зосереджену самоіндукцію L_0.

Встановити, за яких умов у випадку а) відсутня відбита хвиля (“повне поглинання”) і за яких умов амплітуда відбитої хвилі удвічі менша за амплітуду хвилі, яка надходить.

21. Необмежений пружний стрижень отримано у результаті з’єднання у точці $x = 0$ двох напівобмежених однорідних стрижнів. При $x < 0$ щільність мас, модуль пружності стрижня та швидкість розповсюдження малих повздовжніх збурень дорівнюють ρ_1, E_1, a_1, а при $x > 0$ вони становлять ρ_2, E_2, a_2. Нехай з області $x < 0$ стрижнем біжить хвиля $u_1(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{a_1}\right)$, $t \le 0$. Знайти відбиту та заломлену хвилі. Дослідити розв’язок при $E_2 \to 0$ та при $E_2 \to +\infty$.

22. Кінці струни $x = 0$ та $x = l$ закріплені жорстко, початкове відхилення задане за допомогою рівності $u(x,0) = A\sin\dfrac{\pi x}{l}$ при $0 \le x \le l$, початкові швидкості дорівнюють нулю. Знайти відхилення $u(x,t)$ при $t > 0$.

23. Знайти розв’язок хвильового рівняння $u_{tt} = a^2\Delta u$, що задовольняє початкові умови $u\big|_{t=0} = \varphi(r)$, $u_t\big|_{t=0} = \psi(r)$,

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, де φ, ψ – функції, які задані для усіх $r \geq 0$.

24. Область початкових коливань однорідного газу являє собою кулю радіусу R. Початкові швидкості частинок газу усюди дорівнюють нулю, а початкова конденсація S_0 стала усередині кулі, зовні кулі дорівнює нулю. Визначити конденсацію S для довільного моменту часу у точці M, що знаходиться поза областю початкового збурення.

25. Напівобмежена однорідна струна $0 \leq x < \infty$ із закріпленим кінцем $x=0$ знаходиться у прямолінійному положенні рівноваги. У момент часу $t=0$ вона зазнає удару молоточком ширини h на відстані c від точки закріплення. Молоточок сконструйований так, що початкова швидкість, надана струні, буде максимальною по його центру і дорівнюватиме нулю біля краю. Крива початкової швидкості цієї частини струни має вигляд $v_0 \cos\frac{\pi}{h}(x-c)$ при $|x-c| \leq \frac{h}{2}$. Визначити форму струни у момент часу $t>0$.

26. Струна нескінченної довжини $x>0$ з лінійною щільністю ρ та натягом ρa^2 знаходилася у стані рівноваги. При $t>0$ точка $x=0$ здійснює малі коливання

$A\sin\omega t$. Показати, що зсуви точки струни з абсцисою $x>0$ визначаються за формулою

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, & t<\dfrac{x}{a}, \\ A\sin\omega\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

27. Напівобмежена трубка $x>0$, що заповнена ідеальним газом, має на одному кінці ($x=0$) поршень маси M, який може вільно переміщуватися. У момент часу $t=0$ за допомогою удару поршню надають швидкість v_0. Знайти процес розповсюдження хвилі у газі, якщо відомо, що початкові відхилення та початкові швидкості частинок газу дорівнюють нулю.

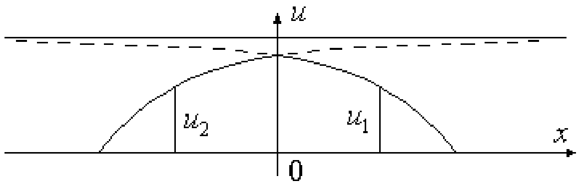

Рис. 11

28. Нескінченна струна, що має у точці $x=0$ зосереджену масу M, знаходиться у положенні рівноваги. У початковий момент $t=0$ ударом молоточка масі M надана швидкість v_0. Довести, що у момент часу $t>0$

збурена струна має вигляд, зображений на рис. 11, де $u_1(x,t)$ – пряма хвиля:

$$u_1(x,t)=\begin{cases}\dfrac{Mav_0}{2T_0}\left(1-e^{\frac{2T_0}{Ma^2}(x-at)}\right), & x-at<0,\\ 0, & x-at>0,\end{cases}$$

$u_2(x,t)$ – зворотна хвиля

$$u_2(x,t)=\begin{cases}\dfrac{Mav_0}{2T_0}\left(1-e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x-at)}\right), & x+at>0,\\ 0, & x+at<0,\end{cases}$$

а T_0 – сила натягу струни.

Задачі до § 6

29. Розв'язати задачі ($n=1$):

1) $u_t=u_{xx}+3t^2$, $u\big|_{t=0}=\sin x$;

2) $u_t=u_{xx}+e^{-t}\cos x$, $u\big|_{t=0}=\cos x$;

3) $u_t=u_{xx}+e^{t}\sin x$, $u\big|_{t=0}=\sin x$;

4) $u_t=u_{xx}+\sin t$, $u\big|_{t=0}=e^{-x^2}$;

5) $4u_t=u_{xx}$, $u\big|_{t=0}=e^{2x-x^2}$;

6) $u_t=u_{xx}$, $u\big|_{t=0}=xe^{-x^2}$;

7) $4u_t=u_{xx}$, $u\big|_{t=0}=\sin x\cdot e^{-x^2}$.

30. Розв'язати задачі ($n = 2$):

1) $u_t = \Delta u + e^t$, $u\big|_{t=0} = \cos x \sin y$;

2) $u_t = \Delta u + \sin t \cdot \sin x \cdot \sin y$, $u\big|_{t=0} = 1$;

3) $u_t = \Delta u + \cos t$, $u\big|_{t=0} = xy\, e^{-x^2-y^2}$;

4) $8u_t = \Delta u + 1$, $u\big|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}$;

5) $2u_t = \Delta u$, $u\big|_{t=0} = \cos xy$.

31. Знайти розв'язок задачі

$$u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - cu = f(x,t) ,\ u\big|_{t=0} = u_0(x)$$

з такими даними:

1) $f = 1$, $u_0 = 1$, $c = 1$;

2) $f = e^t$, $u_0 = \cos x$, $a = c = 1$, $b = 0$;

3) $f = e^t$, $u_0 = \cos x$, $a = c = 2$, $b = 0$;

4) $f = t \sin x$, $u_0 = 1$, $a = c = 1$, $b = 0$;

5) $f = 0$, $u_0 = e^{-x^2}$;

6) $f = \omega(t) \in C^1(t \ge 0)$, $u_0 \in C$ та обмежена.

Задачі до § 7

32. Довести, що задача Гурса

$$u_{xy} = 0 ,\ 0 < y < \alpha x ,\ x > 0 ,$$

$$u\big|_{y=0} = f(x),\ u\big|_{y=\alpha x} = g(x)$$

має єдиний розв'язок $u(x,y) = f(x) + g\left(\frac{y}{\alpha}\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right)$, якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ належать до класу $C^2(x>0) \bigcap C(x \ge 0)$ та $f(0) = g(0)$.

33. Нехай функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ належать до класу $C^2(x>0) \bigcap C(x \ge 0)$ та $\varphi(0) = \psi(0)$. Для яких дійсних додатних a задача Гурса

$$-au_{xx} + u_{yy} = 0,\ x>0,\ y>0,\ u\big|_{y=0} = \varphi(x),\ u\big|_{x=0} = \psi(y)$$

має єдиний розв'язок? Знайти цей розв'язок.

34. Довести, що задача Гурса

$$u_{xy} = 0,\ x>0,\ y>0,$$

$$u\big|_{y=0} = f(x),\ u\big|_{x=0} = g(y)$$

має єдиний розв'язок $u(x,y) = f(x) + g(y) - f(0)$, якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ належать до класу $C^2(x>0) \bigcap C(x \ge 0)$ та $f(0) = g(0)$.

35. Довести, що задача Гурса

$$u_{xy} = 0,\ y > \alpha x,\ x>0,\ \alpha<0,$$

$$u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{y=\alpha x} = 0$$

не має єдиного розв’язку. Показати, що множина розв’язків цієї задачі має вигляд $u(x,y)=f(x)-f\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)$, де f – довільна функція з класу $C^2(R)$, що дорівнює нулю для $x \le 0$.

У задачах 36 – 56 знайти розв’язок задачі Гурса.

36. $u_{xy}+x^2yu_x=0$, $x>0$, $y>0$, $u\big|_{x=0}=0$, $u\big|_{y=0}=x$.

37. $u_{xy}+u_x=1$, $x>0$, $y>0$, $u\big|_{x=0}=\varphi(y)$, $u\big|_{y=0}=\psi(x)$, де функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ належать до класу $C^2(x>0)\bigcap C(x\ge 0)$ та $\varphi(0)=\psi(0)$.

38. $u_{xy}+xu_x=0$, $x>0$, $y>0$, $u\big|_{x=0}=\varphi(y)$, $u\big|_{y=0}=\psi(x)$, де функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ належать до класу $C^2(x>0)\bigcap C(x\ge 0)$ та $\varphi(0)=\psi(0)$.

39. $2u_{xx}-2u_{yy}+u_x+u_y=0$, $y>|x|$, $u\big|_{y=x}=1$, $u\big|_{y=-x}=(x+1)e^x$.

40. $2u_{xx}+u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0$, $-\dfrac{1}{2}x<y<x$, $u\big|_{y=x}=1$, $u\big|_{y=-x}=(x+1)e^x$.

41. $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0$, $x < y < 5x$, $x > 0$, $u\big|_{y=x} = \varphi(y)$, $u\big|_{y=5x} = \psi(x)$, де функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ належать до класу $C^2(x > 0) \bigcap C(x \geq 0)$ та $\varphi(0) = \psi(0)$.

42. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$, $-\frac{1}{4}x^2 < y < 0$, $x > 0$, $u\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{y=-\frac{1}{4}x^2} = x^2$.

43. $u_{xy} - e^x u_{yy} = 0$, $y > -e^{-x}$, $x > 0$, $u\big|_{x=0} = y^2$, $u\big|_{y=-e^{-x}} = 1 + x^2$.

44. $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$, $0 < y < x$, $x > 0$, $u\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{y=x} = x$.

45. $y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0$, $y^3 - 8 < 3x < y$, $0 < y < 2$, $u\big|_{y=2} = 3x + 8$, $u\big|_{3x=y^3} = 2y^3$.

46. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$, $y > x$, $x > 1$, $u\big|_{x=1} = 1$, $u\big|_{y=x} = x$.

47. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + xu_x - yu_y = 0$, $\frac{1}{x} < y < x$, $x > 1$, $u\big|_{y=x} = x$, $u\big|_{y=\frac{1}{x}} = 1 + \ln x$.

48. $3x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$, $\quad x < y < \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\quad 0 < x < 1$,

$u\big|_{x=y} = y$, $u\big|_{x=y^3} = y^2$.

49. $3x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$, $1 < y < x$, $x > 1$, $u\big|_{x=y} = y$,

$u\big|_{y=1} = \cos\dfrac{\pi x}{2}$.

50. $u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} - \cos^2 x \cdot u_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0$,

$|y - \cos x| < x$, $x > 0$, $u\big|_{y=x+\cos x} = \cos x$, $u\big|_{y=-x+\cos x} = \cos x$.

51. $u_{xy} - \dfrac{1}{x-y}(u_x - u_y) = 1$, $\quad y < -x$, $\quad x > 2$, $\quad u\big|_{y=-x} = 0$,

$u\big|_{x=2} = 2 + 2y + \dfrac{1}{2}y^2$.

52. $u_{xx} - u_{yy} + \dfrac{2}{x}u_x = 0$, $\qquad y > 1 + |x|$, $\qquad u\big|_{x=1+x} = 1 - x$,

$u\big|_{y=1-x} = 1 + x$.

53. $u_{xx} - u_{yy} + \dfrac{4}{x}u_x + \dfrac{2}{x^2}u = 0$, $\quad y > x$, $\quad x > 1$, $\quad u\big|_{x=1} = y$,

$u\big|_{y=x} = 1$.

54. $u_{xy} = 1$, $\alpha x < y < \beta x$, $x > 0$, $0 < \alpha < \beta$, $u\big|_{y=\alpha x} = 0$,

$u\big|_{y=\beta x} = 0$.

55. $u_{xy} = 0$, $x^2 < y < 2x^2$, $x > 0$, $u\big|_{y=x^2} = x^4$, $u\big|_{y=2x^2} = x^2$.

56. $u_{xy} = 0$, $x^4 < y < x^2$, $0 < x < 1$, $u\big|_{y=x^2} = 0$, $u\big|_{y=x^4} = x(1-x)$.

Література

1. Сборник задач по уравнениям математической физики / под ред. В.С. Владимирова. – М. Наука, 1974. – 272 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 687 с.
3. Вірченко Н.О. Основні методи розв’язання задач математичної фізики. – Навчальний посібник. – Київ: КПІ, 1997. – 370 с.
4. Бицадзе А.В. Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
5. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975. – 127 с.
6. В.М. Гончаренко, І.Б. Романенко, В.Г. Самойленко. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з курсу “Рівняння математичної фізики” для студентів механіко-математичного факультету. Постановка основних крайових задач для рівнянь математичної фізики. – К.: Навчально-освітній центр, 2003. – 36 с.
7. В.М. Гончаренко, І.Б. Романенко, В.Г. Самойленко. Методичні вказівки до практичних занять та

самостійної роботи з курсу “Рівняння математичної фізики” для студентів механіко-математичного факультету. Зведення рівнянь з частинними похідними до канонічного вигляду. – К.: Навчально-освітній центр, 2003. – 36 с.

8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
10. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
11. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища школа, 1995. – 350 с.
12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М. Наука, 1983. – 424 с.
13. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К: Либідь, 2001 р. – 334 с.
14. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 559 с.
15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
16. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Справочное пособие. – К.: Вища школа, 1985. – 528 с.

17. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 468 с.
18. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 360 с.

Зміст

Навчальне видання

Методичні вказівки

до практичних занять та самостійної роботи
з курсу "Рівняння математичної фізики"

Задача Коші та задача Гурса для рівнянь з частинними похідними

для студентів механіко-математичного факультету

Упорядники: **Романенко** Ігор Борисович
Самойленко Валерій Григорович